MA-1111—Segundo Parcial–Solución—A

1. (8 pts.)
   Halle los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{x^2-4x-5}{|5-x|}$

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$

   Solución:

   (a) $$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-4x-5}{|5-x|} \overset{\heartsuit}{=} \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)(x+1)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} x+1 = 6$$

   $\heartsuit$: $|5-x| = x-5$, ya que $x>5$.

   (b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^3}$$
   $$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos(x)}$$
   $$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}$$
   $$= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

2. (7 pts.)

   a) Escriba el significado de
   $$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

   b) Según la notación usada en clases, para $\varepsilon = \frac{1}{8}$, encuentre un δ apropiado, que cumpla con la definición del límite anterior.

   Solución:

   a) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0<|x-3|<\delta$ entonces $|x^2-9|<\varepsilon$.

   b) $|x^2-9| = |x-3||x+3|$. Si en principio escogemos $\delta \le 1$ entonces tendremos que $|x-3|<1$, lo que implica que $-1<x-3<1$, es decir, $5<x+3<7$. por lo tanto, $\delta<1 \Rightarrow |x+3|<7$.

   Si queremos que $0<|x-3|<\delta \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon$, nececitaríamos entonces que $\delta \le \varepsilon/7$.

   Así, un valor de δ que sirva para $\varepsilon = 1/8$ es
   $$\delta = \min\left\{1, \frac{1}{56}\right\} = \frac{1}{56}$$

3. (7 pts.)

   Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos constantes. Sea
   $$g(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x<2 \\ b & \text{si } x=2 \\ \dfrac{x-3+\sqrt{x-1}}{x^2-4} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

   Encuentre los valores de las constantes a y b para los cuales $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

   Solución: La función $g(x)$ es continua en $(-\infty, 2)$, ya que en ese intervalo $g(x)$ está definida como una recta. También es continua en $(2,\infty)$, pues en ese intervalo $g(x)$ es el cociente de funciones continuas (al ser cada una de éstas suma de continuas).

Analicemos ahora la continuidad en $c = 2$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3+\sqrt{x-1}}{x^2-4} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-3+\sqrt{x-1})(x-3-\sqrt{x-1})}{(x^2-4)(x-3-\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-3)^2-(x-1)}{(x^2-4)(x-3-\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-6x+9-x+1}{(x^2-4)(x-3-\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)(x-3-\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-5)}{(x+2)(x-3-\sqrt{x-1})} \\
&= \frac{2-5}{(2+2)(2-3-\sqrt{2-1})} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Para que la función $g(x)$ sea continua en $c = 2$ es necesario y suficiente que

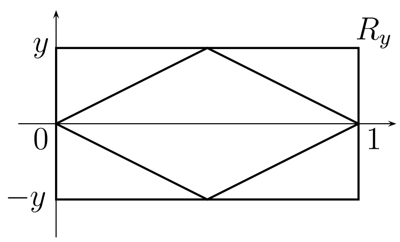
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2).$$

Así entonces $\boxed{b = g(2) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = \frac{3}{8}}$.

Por otro lado, $\lim_{x\to 2^-} x + a = 2 + a = \frac{3}{8}$, de donde $\boxed{a = -\frac{13}{8}}$.

4. (6 pts.)

Sea $P(y)$ el perímetro del rectángulo R_y de vértices $(0, y)$, $(1, y)$, $(1, -y)$, y $(0, -y)$, ($y > 0$), y sea $Q(y)$ el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de R_y.



a) Halle las fórmulas explícitas para $P(y)$ y $Q(y)$.

b) Halle $\lim_{y\to 0^+} \frac{P(y)}{Q(y)}$.

Solución:

(a) $P(y) = 4y + 2$

$$Q(y) = 4\sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$$

(b) $$\lim_{y\to 0^+} \frac{P(y)}{Q(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{4y+2}{4\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}} = \frac{2}{4\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$$

5. (7 pts.)

a) Use el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación

$$x^3 + 3x + 2 = 0,$$

tiene una raíz.

b) Halle una aproximación de esa raíz con un error menor a $0,25$.

Solución:

a) Sea $f(x) = x^3 + 3x + 2$. Entonces

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 > 0, \\ f(-1) &= -1 - 3 + 2 = -2 < 0 \end{aligned}$$

Como f es continua en el intervalo $[-1, 0]$, $f(-1) < 0$, y $f(0) > 0$, por el teorema del valor intermedio (o de Bolzano), existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$, lo que quiere decir que c es un raíz de la ecuación dada:

$$c^3 + 3c + 2 = 0$$

b) Evaluamos en el punto medio del intervalo hallado:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{8} > 0 \end{aligned}$$

El cambio de signo ocurre en la mitad izquierda, es decir, $[-1, -1/2]$. Al aplicar el teorema de Bolzano en este intervalo, podemos hallar $c \in (-1, -1/2)$. Por lo tanto el punto medio de este intervalo, $c_0 = -\frac{3}{4}$ dista de c en menos de $1/4 = 0,25$. Entonces, c_0 será una aproximación apropiada en este caso.